Teorema de Hahn-Banach vector valuado

Abraham Rueda Zoca

Uno de los principales resultados en Análisis Funcional es el teorema de Hahn-Banach. Una forma en la que aparece es la siguiente: dado un espacio de Banach Z, un subespacio $Y \subseteq Z$ y un funcional lineal y continuo $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, siempre existe un funcional $F : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $F(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$ y con $\|F\| = \|f\|$ (esto puede resumirse diciendo que F es una extensión de f con la misma norma).

Una pregunta natural aquí es: ¿existe una versión vector-valuada del teorema anterior? Es decir, ¿podemos cambiar $\mathbb{R}$ por un espacio de Banach X cualquiera? Y si la respuesta a las preguntas anteriores es "no", ¿cómo son los espacios de Banach X que sí que lo cumplen?

El objetivo de este taller será dar respuestas a las preguntas anteriores. Diremos que un espacio de Banach es *inyectivo* si cumple la versión vector-valuada del teorema de Hahn-Banach descrita anteriormente.

Por un lado, daremos ejemplos de espacios de Banach X que son inyectivos y ejemplos que no lo son. A partir de aquí, nos preguntaremos qué forma tienen los espacios de Banach inyectivos. Pondremos entonces rumbo al teorema de Kelley, que dice que un espacio de Banach inyectivo es isométricamente isomorfo a un espacio $C(K)$ para cierto espacio topológico compacto Hausdorff K.

Nuestra hoja de ruta será seguir la Sección 4.3 de [1], donde dicho resultado es el Theorem 4.3.7, haciendo previamente un estudio sobre la teoría de puntos extremos en espacios de Banach y resultados alrededor del teorema de Krein-Milman, desarrollado por ejemplo en [2] (Capítulo 3).

Referencias

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, New York, 2006.

[2] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant and V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CMS Books in Mathematics. Springer-Velag New York 2001.