El radio de Bohr

Pablo Sevilla

A principios del siglo XX Harald Bohr probó que, si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa con desarrollo de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces

$$\sup_{|z|<1/3} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sup_{|z|<1} |f(z)| . \tag{1}$$

Además, $r = 1/3$ es óptimo, en el sentido que es el radio del mayor disco en el que se puede tomar el supremo de la parte izquierda de la desigualdad para que ésta se verifique para toda función holomorfa.

Este resultado ha llamado la atención de multitud de matemáticos. Cuando se plantea el problema de extender este resultado, pueden adoptarse diferentes puntos de vista, que han dado lugar a interesantes líneas de investigación. Algunos de ellos son:

- Fijar $r > 1/3$ en el supremo de la izquierda. Aparece entonces una constante en la parte derecha de la desigualdad. Estudiar su dependencia de r.
- Considerar funciones en varias variables complejas (en el polidisco n-dimensional $\mathbb{D}^n$) y estudiar el problema análogo: cuál es el mayor r para el que una desigualdad como (1) (con un polidisco de radio r) se cumple para toda función holomorfa $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$. Estudiar la dependencia del número de variables.
- Considerar diferentes espacios de funciones holomorfas y encontrar el mayor r para el que una desigualdad como (1) se cumple para toda función en el espacio.
- Plantear una desigualdad análoga a (1), en la que la suma en la parte de la izquierda se reemplaza por una suma de Cesaro. Nuevamente, encontrar el mjor r posible en esta situación.

Nuestro objetivo es estudiar y analizar con detalle la prueba del resultado original de Bohr y hacer una introducción a alguna de las líneas de investigación a las que ha dado lugar.