EL PROBLEMA DE KAKEYA

DAVID BELTRAN

Hace aproximadamente un siglo, Abram Besicovitch demostró que existen conjuntos compactos $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue cero que contienen un segmento unidad en todas las direcciones. La conjetura de Kakeya dice que dichos conjuntos E no pueden ser más pequeños que esto, en el sentido que su dimensión de Hausdorff debe ser la misma que la del espacio ambiente. Esta conjetura ha recibido la atención de importantes analistas armónicos desde que Charles Fefferman [4] conectara, en 1971, los conjuntos de Besicovitch con el problema de sumabilidad esférica de las series de Fourier. Fue resuelta por Roy Davies [1] en 1971 para $n = 2$, pero sigue abierta en dimensiones mayores o igual que 3. Hoy en día, se sabe que resultados parciales en la conjetura de Kakeya son claves para entender otros problemas de gran importancia en el análisis armónico, como el de restricción de la transformada de Fourier, el de sumabilidad de Bochner–Riesz para series de Fourier, o ciertos comportamientos de las soluciones de la ecuación de ondas, entre otros. Esto ha conllevado a que el problema de Kakeya juegue un papel central en el Análisis Armónico moderno.

El objetivo de este curso es hacer una introducción a este problema, así cómo estudiar su variante en términos de la función maximal de Kakeya y aprender algunas de las técnicas básicas para obtener resultados parciales. Se hará especial énfasis en la versión análoga en los cuerpos finitos $\mathbb{F}_q^n$, introducida por Thomas Wolff [7] en 1999 y resuelta por Zeev Dvir [2] en 2008 con el método polinomial. A parte de estas, dos referencias básicas serán los libros de Falconer [3] y Guth [6]. Si el tiempo lo permite, se estudiará la prueba de Larry Guth [5] de la versión multilineal de la conjetura.

References

[1] Roy O. Davies *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **69** (1971), 417–421.

[2] Zeev Dvir, *On the size of Kakeya sets in finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no.4, 1093–1097.

[3] Kenneth Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Math., **85** Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[4] Charles Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 330–336.

[5] Larry Guth, *A short proof of the multilinear Kakeya inequality*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **158** (2015), no.1, 147–153.

[6] Larry Guth, *Polynomial methods in combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **64** American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[7] Thomas Wolff, *Recent work connected with the Kakeya problem*, Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996). pages 129–162, 1999.